

РАЗБОР ЗАДАЧИ «АВТОМАТ ДЛЯ ГОЛОСОВАНИЯ»

Рассмотрим задачу конкурса КИО-2005: «Имеется неограниченное число логических элементов для голосования с тремя входами и одним выходом (если на двух или трех входах такого элемента 1, то на выходе 1, иначе на выходе 0). Если один из входов логического элемента остается свободным, то на этом входе всегда ноль. Из них надо собрать устройство для голосования жюри из 7 человек, используя наименьшее число элементов (на наборах входных сигналов, содержащих более трех 1, устройство должно выдавать 1, иначе 0). Правильно работающие устройства сравниваются по числу элементов.

Устройства, которые работают неправильно, сравниваются по доле наборов, на которых они дают правильный результат. При равной доле лучше тот, у которого меньше элементов».

Предложенные элементы реализуют функцию доминирования. Эту функцию можно записать, используя только две операции: конъюнкцию и дизъюнкцию:

$$f(x; y; z) = xy \vee xz \vee yz$$

Действительно, если две из трех переменных равны 1, то и результат будет равен 1.

Попробуем построить функцию доминирования для 5 переменных (автомат для 5 голосующих):

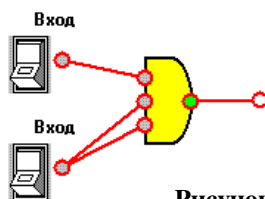


Рисунок 1.



$$f(x; y; z; u; v) = xyz \vee xuy \vee \\ \vee xuv \vee xzu \vee xzv \vee xiv \vee \\ \vee yzu \vee yzv \vee yuv \vee ziv$$

Нетрудно видеть, что в правой части формулы фактически перечислены все варианты голосования, оканчивающиеся принятием положительного решения.

Один из кажущихся перспективным путей решения – сделать из предлагаемых элементов автоматы, реализующие конъюнкцию и дизъюнкцию, а затем из них собрать автомат для любого количества голосующих.

Упражнение. Попробуйте сделать это или доказать невозможность такого решения.

Указание. Попробуем собрать схему с двумя входами из одного элемента. Вариантов не много: в любом из них надо подсоединить один из двух входов (дизъюнкция и конъюнкция – функции двух переменных) к двум входам элемента (рисунок 1), но в этом случае на выходе всегда будет то же значение, которое принимает переменная, значение которой подается на два входа. Таким образом, мы получаем одну из двух функций:

$$f(x; y) = x \text{ или } f(x; y) = y,$$

которые не приводят к интересным результатам.

Попробуем построить искомый автомат, соединяя два базовых элемента в различных допустимых вариантах. Их также не так много (один из них показан на рисунке 2).

Если на выходе первого (стоящего левее) элемента значение 1, то две из трех переменных x , y , z также принимают значения 1. Тогда для положительного голосования достаточно, чтобы хотя бы одна из переменных x и y принимала значение 1. Неправильный результат схема даст, только если «за» голосуют xuz , на остальных 9 тройках схема дает правильный результат.

Это подсказывает такое решение задачи для 5 голосующих (рисунок 3).

Нетрудно видеть, что схема получена соединением трех частей, построенных выше, посредством еще одного элемента доминирования.

Первая из частей дает неправильный результат только на тройке xuz , вторая – на uzi , третья – на ziv . Однако, так как в это же время две другие части дают на этих элементах значение 1, то и на выходе замыкающего элемента будет значение 1. Остальные 7 наборов, определяющих большинство, дают значение 1 на выходе каждой из частей и, следовательно, дадут значение 1 и на выходе замыкающего элемента доминирования. Теперь надо проверить, не дает ли схема положительного результата голосования на наборах, у которых не более 2 переменных принимают значения 1. В силу симметричности схемы достаточно проверить, что схема дает нули, если голосуют «за» только xu или xz или xv или xi или xj . Это нетрудно сделать вручную или с использованием системы тестирования в задаче (тестирование делается для 7 входов, но если последние два не задействовать, то найденные программой «ошибочные» наборы легко просмотреть и увидеть, что при игнорировании последних двух входов они верны).

Заметьте, что количество элементов в схеме можно уменьшить.

Упражнение. Постройте по схеме (рисунок 4) конструкцию из элементов доминирования и проверьте ее правильность.

На следующих рисунках показаны работы победителей конкурса.

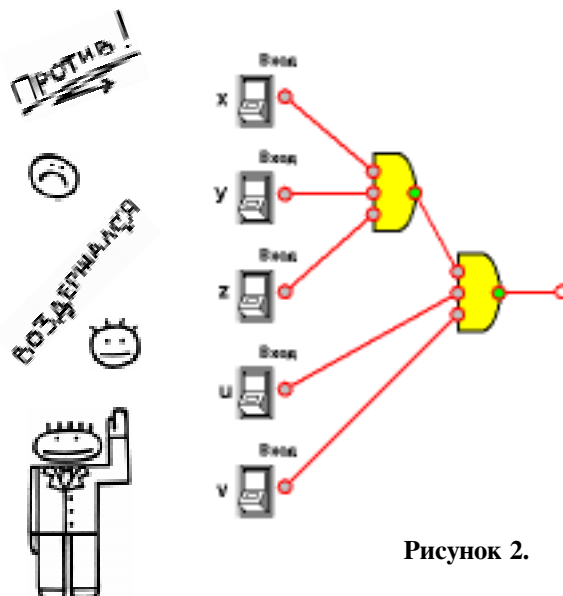


Рисунок 2.

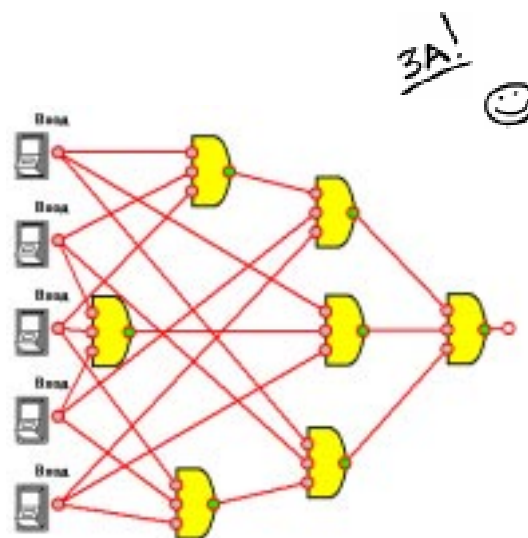


Рисунок 3.

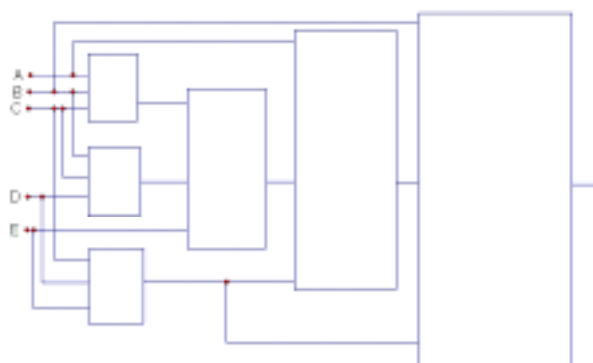
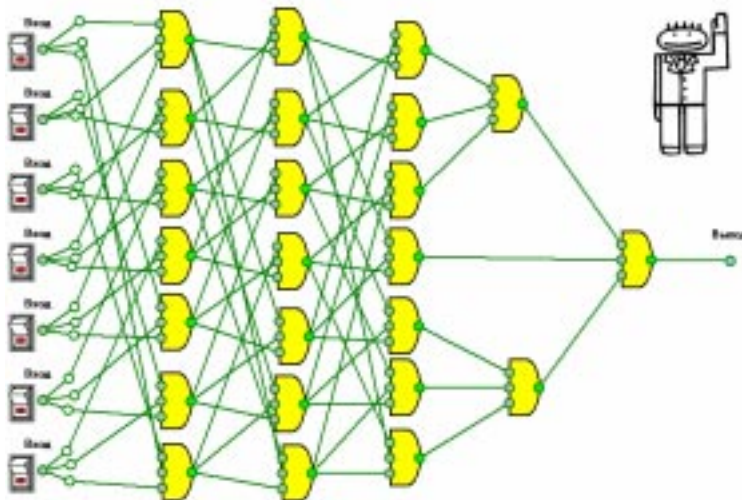
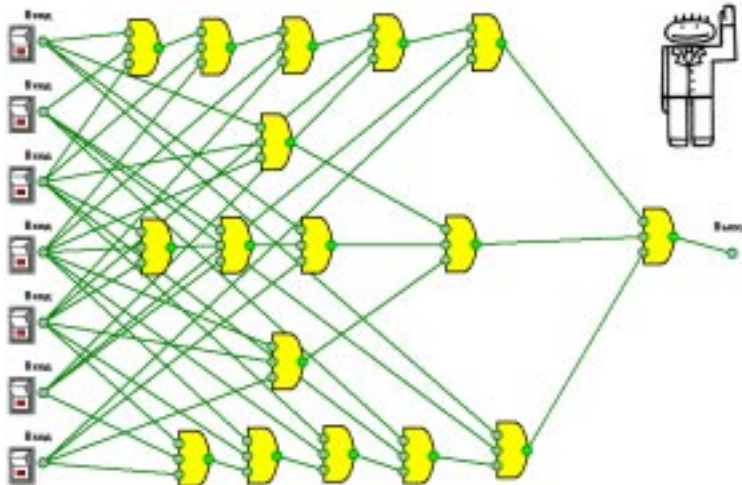


Рисунок 4.

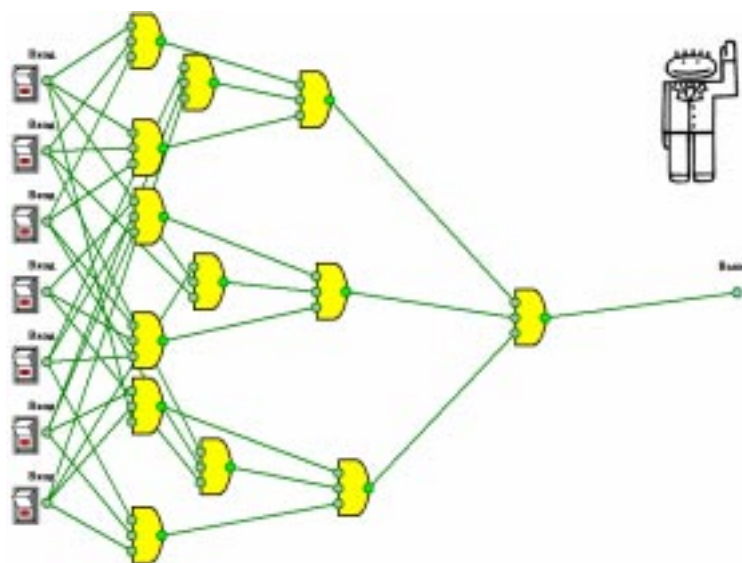
РЕШЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ КОНКУРСА



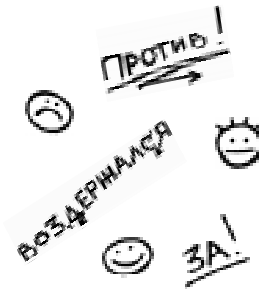
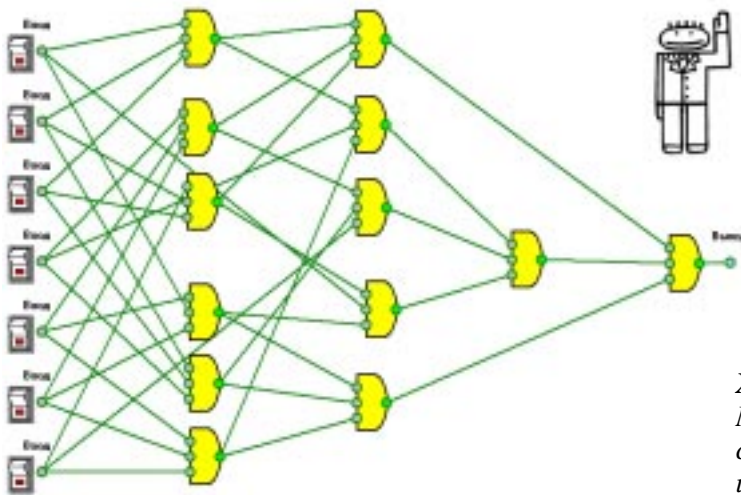
Смелков Евгений. Кострома, Костромской политехнический колледж, 4 курс (24 элемента).



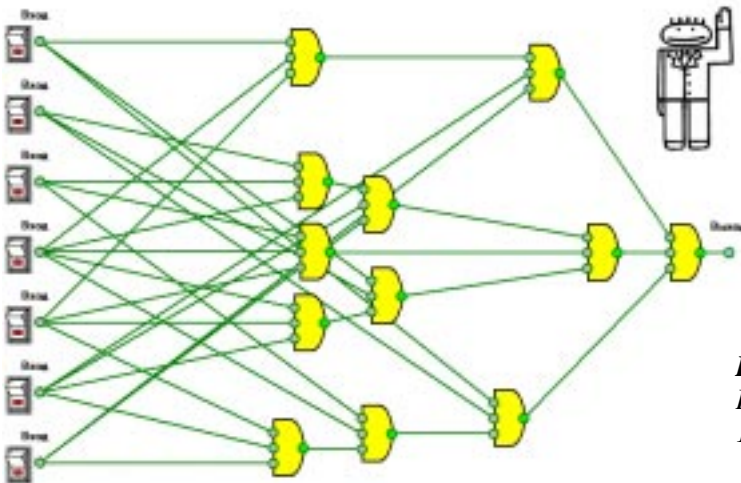
Дитятев Евгений. Барнаул, школа 94, 7 класс (17 элементов).



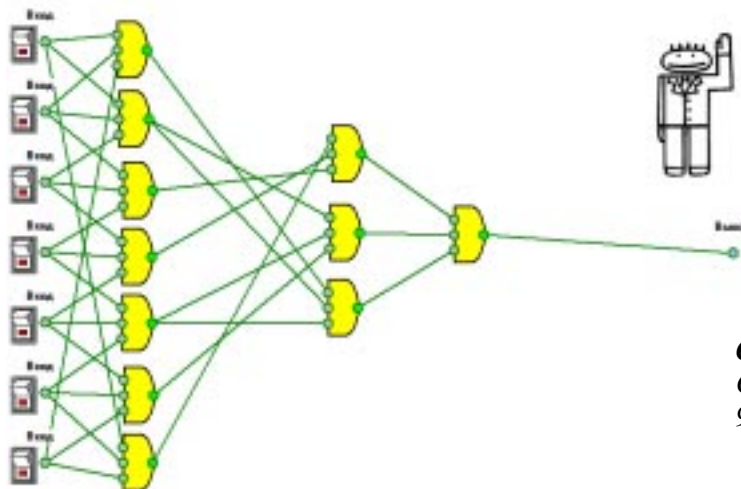
Гинжун Мария. Москва, ЦО № 654, 10 «миф» класс (13 элементов).



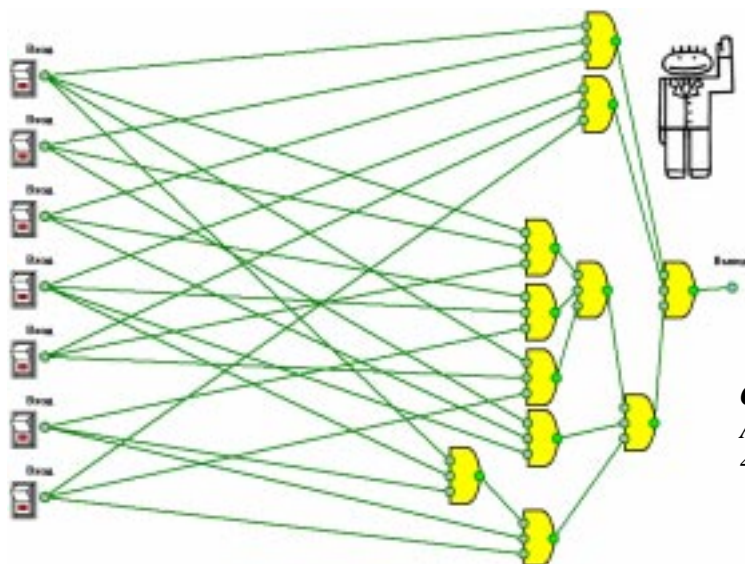
Худяков Дмитрий.
МОУ Орджоникидзевская
средняя общеобразовательная
школа, 10 б класс
(13 элементов).



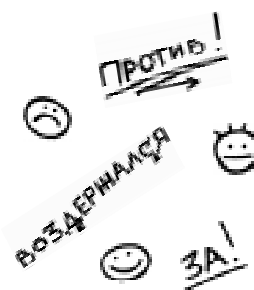
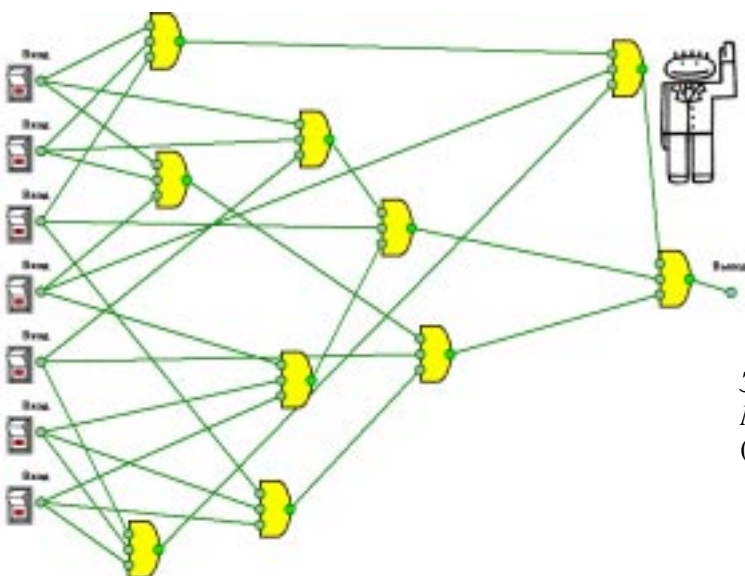
Попов Дмитрий. Санкт-
Петербург, СПбГУ, Мат-Мех,
1 курс (12 элементов).



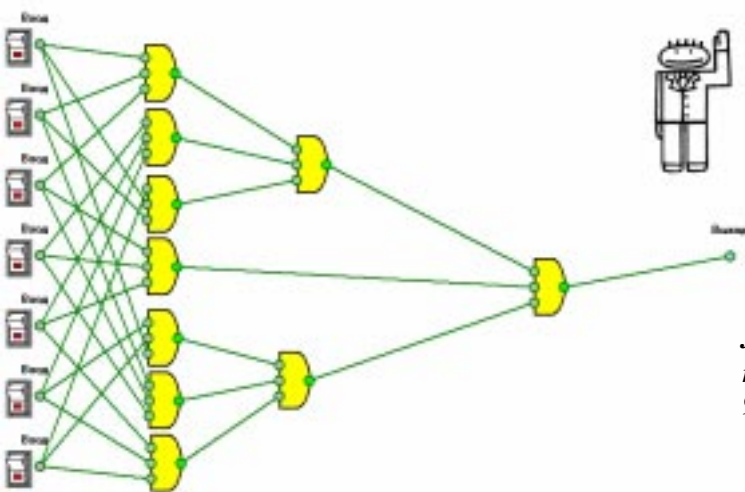
Самусенко Александр.
Санкт-Петербург, 640 школа,
9 а класс (11 элементов).



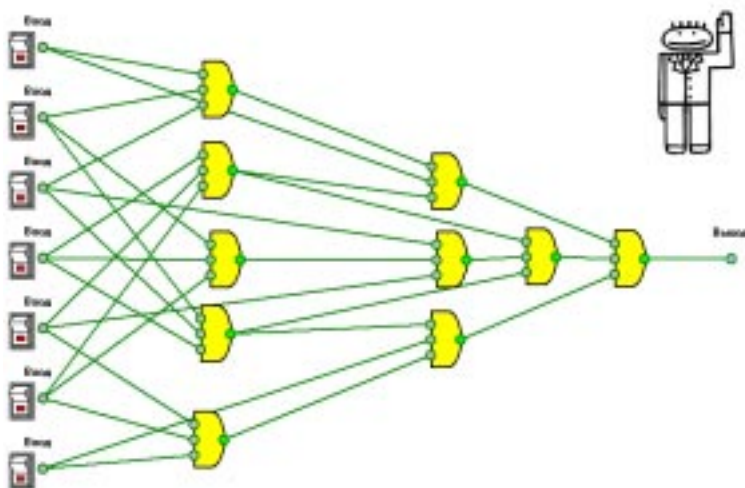
Суворов Александр. Барнаул, АГТУ им. И.И. Ползунова, 4 курс (11 элементов).



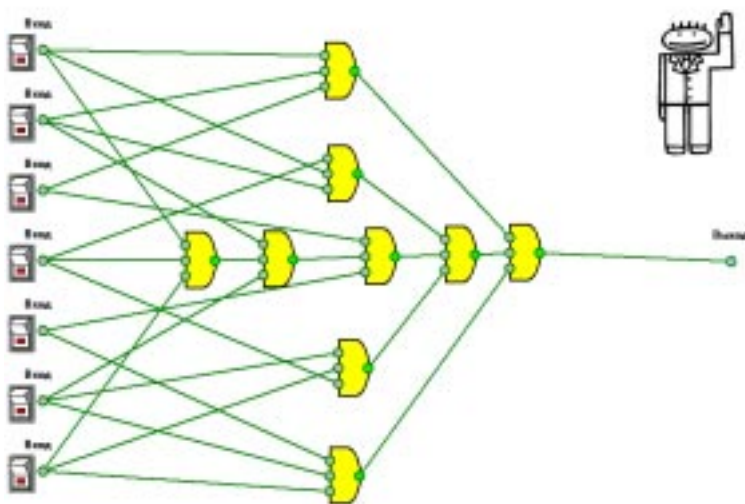
Зубарев Руслан. Липецк, Медицинский колледж, 2к, 1з/в (10 элементов).



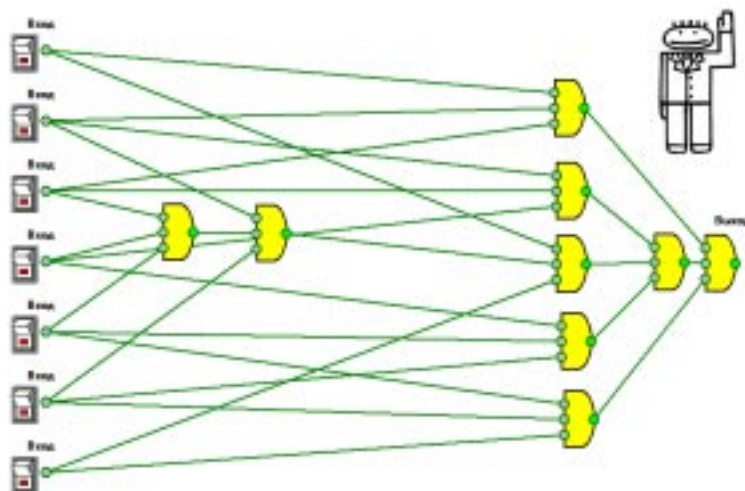
Ложкин Дмитрий. Санкт-Петербург, 640 школа, 9 класс (10 элементов).



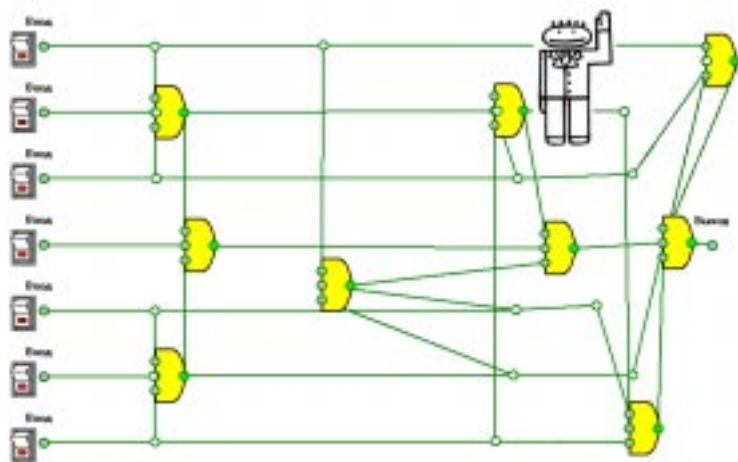
Кочерова Мария.
МОУ Орджоникидзевская средняя общеобразовательная школа, 8 а класс (10 элементов).



Войнов Евгений. Москва, Лицей информационных технологий № 1537, 11 класс (9 элементов).

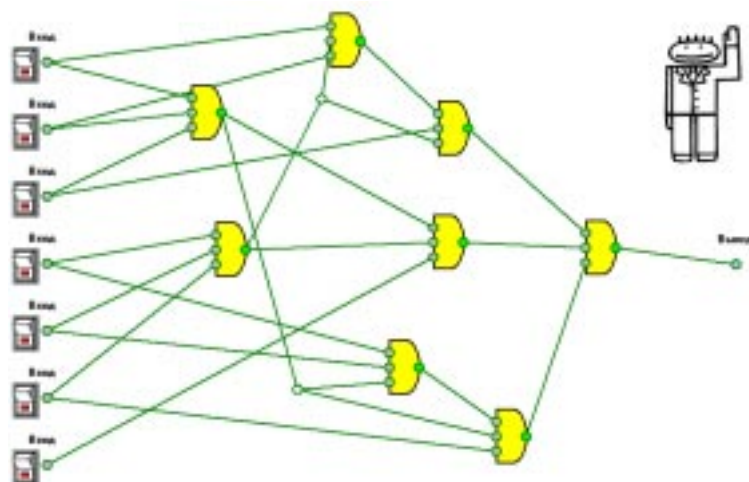


Кибенко Андрей. Рубцовск, Лицей при РИИ, 10 б класс (9 элементов).



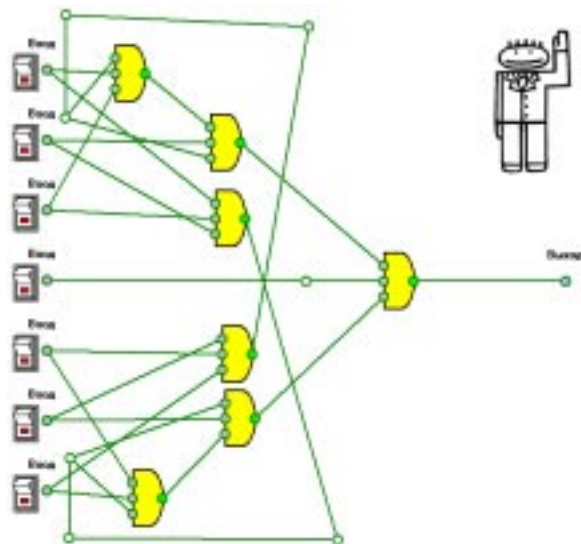
ВОЗДЕРЖАЛСЯ
😊
3А!

Бойкий Роман. Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239, 8(1) класс (9 элементов).



ВОЗДЕРЖАЛСЯ
😊
3А!

Уржумцев Олег. Санкт-Петербург, 27 школа, 10 а класс (8 элементов).



Жюри конкурса.
Степулёнок Денис,
Санкт-Петербург, инженер-программист, выпускник кафедры АСОиУ СПбГЭТУ (лучшее найденное решение, 7 элементов).

На диске к журналу находится программа конструирования автоматов для голосования. Читатели могут проверить эти решения, улучшить их или найти свои. Если кому-то удастся улучшить последнее решение, оно будет опубликовано на страницах журнала.



Наши авторы, 2005.
Our authors, 2005.

Поздняков Сергей Николаевич,
доктор педагогических наук,
профессор кафедры ВМ-2 СПбГЭТУ,
Степулёнок Денис Олегович,
инженер-программист, выпускник
кафедры АСОиУ СПбГЭТУ.